DOI: 10.5937/vojdelo1906356D

ПРИМЕНА МАТРИЧНОГ РАЧУНА У ЕКОНОМСКИМ ФУНКЦИЈАМА

Владо Ђурковић
Висока школа за менаџмент и економију, Крагујевац
Иван М. Милојевић
Универзитет одбране у Београду, Војна академија
Предраг Јовићевић
Факултет за примењени менаџмент, економију и финансије, Београд

У раду је приказана могућност и неопходност коришћења матричног рачуна ради лакшег и прегледнијег решавања економских проблема у матричном облику. Дата је поставка матрица, преглед инпут-оутпут релације и матрице технологије. На практичном примеру приказана је његова делотворна примена.

Кључне речи: *матрични рачун, модел Леонтјева, економска анализа*

Увод

Матрица A типа или реда $m \times n$ je pravougaona šema brojeva ili elemenata a_{ij} који су поређани у m врста и n колона.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Елементи матрице су бројеви реални и комплексни, или неки други математички објекти. У применама сваки елеменат матрице има неко стварно значење или интерпретацију, сем у случају када служи као помоћно калкулативно средство. Ми ћемо овде узимати, да су елементи a_{ij} $\left(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n\right)$ реални бројеви.

Тип (ред) матрице $m \times n$ не показује само колико она има елемената већ и како су поређани, какав је облик матрице. Неки аутори пишу $A_{m\times n}$ када хоће да нагласе да матрица A има m врста и n колона.

Уопште је $m \neq n$. Матрица је квадратна, ако је $m = n$.

Две матрице A і B су једнаке, симболички: $A = B$, ако имају исти ред и све одговарајуће елементе једнаке. Ако бар један од тих услова није испуњен, матрице нису једнаке.

Каже се, да је матрица A већа од матрице B, истог реда, ако и само ако сваки елемент од A је стриктно већи од одговарајућег елемента од B, tj. $A > B$, ако и само ако $a_{ij} > b_{ij}$, $\left(i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n\right)$.

За матрицу A се каже, да је већа од матрице B или једнака B, ако и само ако сваки елемент од A је већи или једнак одговарајућем елементу од B, или симболички: $A \geq B$, ако и само ако $a_{ij} \geq b_{ij}$, $\left(i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n\right)$.

Ове две релације неједнакости нису дефинисане за матрице различитог реда.

Преглед литературе

Коришћење матричног рачуна у проучавању економских догађаја значајно је услед све веће тенденције примене маргиналистичког правца изучавања економских појава. Овако посматрано, може се рећи да се економски процеси у домену власништва над капиталом могу утврдити као релативни односи (Дамњановић, Иванов, Миленковић, 2017).

Матрични рачун у макроекономским односима користе се у проучавању догађаја за најзначајније макроекономске секторе. У овако структурно посматраним системима Ленотијева матрица налази изузетно значајну примену (Galbusera, Giannopoulos, 2018). У литератури се јавља и под називом „анализа интер-индустријских релација”, при чему се „индустрија” сматра врло широко као грана индустрије или још шире као сектор економске активности. Она се називала и „системом Леонтјева” по аутору Василију Леонтјеву (Wassily Leontief), професору на Харвард универзитету у САД.

Njегова анализа интериндустријских односа има практичну сврху да успостави квантитативне релације између различитих привредних грана, које треба држати да би се осигурао несметани ток производње у националној економији.

Истраживања у којима се раздвајају утицаји економских функција од укупних факторских вредности укључују моделирање матричног рачуна. Тестирање на примеру утицаја појединачних чинилаца на укупну вредност пословних резултата изучавају се применом матричног рачуна што је нашло широку примену у области Марковљевих ланаца (Петковић, Божиновић, Стојановић, 2018).

Инпут – Оутпут релације

Под називом „инпут-оутпут анализа” данас је добро позната једна модерна анализа међусобних односа различитих привредних грана у економији неке земље. Шта је инпут, а шта оутпут? Инпут је оно што улази, а оутпут оно што излази из неке индустрије (гране, сектора). Шта избацује неки сектор производње? Оно што производи, свој производ. А шта је сектору производње потребно, шта у њега улази? То су средства за производњу, рад и др. (Adedigba, Khan, Yang, 2018; Селаковић, Љепава, Ђелетовић, 2018)

Нека је целокупна економија подељена на n производних сектора. Означимо са X_i, оутпут i-tog сектора, са X_{ij} део оутпута i-tog сектора који прелази у j-ти сектор, а са x_i тзв. финалну тражњу i-tog сектора. То је део укупног оутпута X_i који не иде у ниједан други производни сектор, нити се употребљава у сектору где је створен. Он иде у потрошњу, извоз и др. Та расподела на репродукциону и финалну тражњу односно потрошњу дата је у облику Табеле 1.

Табела 1

X_1	$X_{11}\ X_{12}\ ...\ X_{1n}$	x_1
X_2	$X_{21}\ X_{22}\ ...\ X_{2n}$	x_2
. . .	………………	. . .
X_n	$X_{n1}\ X_{n2}\ ...\ X_{nn}$	x_n

Елементи квадратне матрице у средини табеле представљају „токове” између производних сектора економије. На њеној левој страни је колона укупних оутпута, а на десној је колона нето оутпута или финалне тражње. (Arai, Naito, Ono, 2018) Све величине у тој табели могу се дати у физичким јединицама (нпр. у тонама, метрима итд.) или у вредносном изразу. У том последњем случају имамо *табелу трансакција* између сектора привреде. Величине у једној врсти изражене су у оба случаја у истим јединицама, па се могу сабирати и писати (Бабић, Аљиновић, 1996; Мунђар, 2018): $X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + x_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$.

Те релације показују, како се поједини укупни производи или укупни оутпути X_i дистрибуирају у n производних сектора и у тзв. финалну тражњу. Пошто процес производње захтева употребу директног рада, уводи се у инпут-оутпут табелу и та величина. На пример, имамо на располагању X_0 укупне радне снаге. Тада ћемо са X_{0i} означити радну снагу која је употребљена у производњи оутпута i-tog сектора, а са x_0 радну снагу која није употребљена у производњи материјалних добара. Овде спада и незапослена радна снага. С обзиром на усмеравање радне снаге имамо релацију (Drnovak, 1999; Toyrki, 1998): $X_0 = \sum_{i=1}^{n} X_{0i} + x_0$. Увођењем рада у инпут-оутпут табелу, добија се:

Tabela 2.

X_0	$X_{01}\ X_{02}\ ...\ X_{0n}$	x_0
X_1	$X_{11}\ X_{12}\ ...\ X_{1n}$	x_1
X_2	$X_{21}\ X_{22}\ ...\ X_{2n}$	x_2
. . .	………………	. . .
X_n	$X_{n1}\ X_{n2}\ ...\ X_{nn}$	x_n

Прва врста у Табели 2. показује како је усмерена радна снага у поједине секторе привреде. Величине у колонама Табеле 2. могу се сумирати, само ако су изражене у вредносним јединицама. У том случају, када је Табела 2. табела трансакција, имамо ове релације: $Y_j = X_{0j} + \sum_{i=1}^{n} X_{ij}$. Евидентно је да су Y_j трошкови оутпута j-тог сектора, X_{0j} трошак употребљене радне снаге, а $\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$ трошкови средстава производње, употребљених у производњи оутпут тог сектора. Зато се ове релације могу назвати релацијама трошкова. Шта је разлика $X_j - Y_j = S_j$?

То је вишак створен у сектору j. Дакле, S_j је*, вредност оутпута изнад трошкова* тако, да се може писати: $X_j = Y_j + S_j = X_{0j} + \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + S_j$. (Aguiar, Serrano, 2017)

Ова релација у једном моделу економије од n сектора, по речима познатог пољског економисте проф. О. Лангеа, кореспондира Марксовој декомпозицији вредности оутпута једног одељка националне економије у $c_j + v_j + m_j$. Овде $\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$ стоји уместо c_j, уместо v_j и S_j наместо m_j. Пошто се уведе у табелу трансакција вишак S_j, добија се следећа затворена табела:

Табела 3.

X_0	$X_{01}\ X_{02}\ ...\ X_{0n}$	x_0
X_1	$X_{11}\ X_{12}\ ...\ X_{1n}$	x_1
X_2	$X_{21}\ X_{22}\ ...\ X_{2n}$	x_2

. . .	……………	. . .
X_n	$X_{n1}\ X_{n2}\ ...\ X_{nn}$	x_n
	$S_1\quad S_2\ \ ......\ \ S_n$	
	$X_1\quad X_2\ ......\ X_n$	

Из Табеле 3. јасно произлази да се укупни оутпут X_i може добити сумирајући елементе i -те врсте или j -те колоне. Ова табела темељи се дакле, на рачуноводственој идентификацији између суме свих инпута у неки сектор и оутпута тога сектора.

Овде треба напоменути, да Леонтјев узима, да је део оутпута сектора i који служи у истом сектору као инпут једнак нули, тј. $X_{ii}=0$. На тај начин су сви чланови на главној дијагонали квадратне матрице једнаки нули. То је наравно једно поједностављење стварности, које је могуће, када је број сектора велик. Али, чим имамо мали број сектора, тј. кад су сектори врло широки, може то занемаривање јаче деловати на резултат инпут-оутпут рачуна.

Напоменимо још и табелу под називом „Производња и расподела по гранама делатности”, даје слику међусобних односа индустрија у економији Југославије у 1968. години. Ова инпут-оутпут табела израђена је у Савезном заводу за статистику и објављена 1971. године у публикацији тога завода „Међусобни односи привредних делатности Југославије у 1968. години”. Она садржи матрицу производне потрошње реда 29. Финална потрошња рашчлањена је у тој таблици на пет сектора: повећање залиха, бруто инвестиције, извоз, лична и општа потрошња. Оно што је у табели названо „расподељена средства” су тотални оутпути.

Матрица технологије

Да би се проучио ефекат технолошких услова продукције на инпут-оутпут релације, треба прећи са табеле трансакција на табеле у којима су величине изражене у физичким јединицама.

За ове табеле уводимо нове ознаке:

– количина (физички обим) оутпута i -тог сектора,

– количина финалне тражње i -тог сектора,

– количина оутпута i -тог сектора, која прелази у j -ти сектор,

– одговарајуће количине рада.

Количинска инпут-оутпут табела изгледа овако (Хорватић, 1995):

Табела 4.

Q_0	$Q_{01}\ Q_{02}\cdots Q_{0n}$	q_0
Q_1	$Q_{11}\ Q_{12}\cdots Q_{1n}$	q_1

Q_2	$Q_{21}\ Q_{22} \cdots Q_{2n}$	q_2
. . .	………………	. . .
Q_n	$Q_{n1}\ Q_{n2} \cdots Q_{nn}$	q_n

Свака врста табеле може се сумирати и писати: $Q_i = \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} + q_i$, $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$. Међутим, колоне немају суме.

Технолошки услови производње могу се описати са тзв. *техничким коефицијентима*. Коефицијент

$$a_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_j},\ \left(i = 0,1,2,\dots,n\right),\ \left(j = 1,2,\dots,n\right),$$

показује, колики је износ i-тог сектора потребан да се произведе јединица оутпута j-тог сектора. Коефицијент a_{0j} назначује радну снагу ангажирану (запослену) у производњи јединице оутпута j-тог сектора. У жаргону планера, ти коефицијенти су „нормативи” или „техничке норме”. Они назначују износе радне снаге, сировина итд., који се додељују да се употребе по јединици оутпута.

Ако се уведу технички коефицијенти у суме појединих врста количинске инпут-оутпут табеле, имаћемо: $Q_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}Q_j + q_i$, $\left(i = 0,1,2,\dots,n\right)$. Обично се дели прва једначина: $Q_0 = \sum_{j=1}^{n} a_{0j}Q_j + q_0$, која се односи на радну снагу. Тада се остале могу писати на начин: $\left(1 - a_{ij}\right)Q_i - \sum_{j \neq 1} a_{ij}Q_j = q_i$, $\left(i = 1,2,\dots,n\right)$, или у развијеном облику

$$\left(1 - a_{11}\right)Q_1 - a_{12}Q_2 - a_{13}Q_3 - \dots - a_{1n}Q_n = q_1,$$

$$-a_{21}Q_1 + \left(1 - a_{22}\right)Q_2 - a_{23}Q_3 - \dots - a_{2n}Q_n = q_2,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$-a_{n1}Q_1 - a_{n2}Q_2 - a_{n3}Q_3 - \dots + \left(1 - a_{nn}\right)Q_n = q_n.$$

Матрица коефицијената величине Q у том систему једначина једнака је:

$$T = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & & 1-a_{nn} \end{bmatrix}.$$

То је техничка матрица или *матрица технологије*. У оригиналној Леонтјевљевој матрици технологије на главној дијагонали сви елементи једнаки су јединици. Сада се може разматрани систем линеарних једначина заменити овом једначином матрица: $T \cdot Q = q$, где су Q и q једноколонске матрице количина оутпута Q_i, односно количина финалне тражње q_i. Имамно, дакле, систем од n линеарних једначина са $2n$ величина Q_i, q_i, $(i = 1, 2, ..., n)$. Ако одредимо унапред, на пример планирамо, финалну тражњу $q_1, q_2, ..., q_n$, тада величине $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ можемо израчунати из наведеног система једначина. Или, уместо тога, можемо фиксирати n величина, делом укупних оутпута, делом нето оутпута, а осталих n величина одредити из једначина итд.

Будући да је матрица технологије T несингуларна, имамо $Q = T^{-1} \cdot q$.

Овде треба напоменути да у реалном свету не постоји такав тип економије у којој би матрица технологије била сингуларна (Крстић, Глигић-Савић, Глигић-Думоњић, 2017; Станојевић, Ђорђевић, Волф, 2017).

Инверзија матрице технологије није једноставна, јер се привреда може поделити у велики број сектора. У новије време израђене су америчке инпут оутпут таблице које садрже 500 сектора, дакле матрицу типа 500 × 500. Инверзија таквих матрица, по речима проф. Леонтјева, представља стварни изазов чак и модерним електронским рачунским машинама.

Поједностављени модел Леонтјева

На проблему производње фабрика цигарета која производи четири типа цигарета и продаје их у пет градова. Продаја је током месеца имала следеће резултате:

– први град је продавао по типовима: 40, 60, 20 и 30 хиљада кутија;

– други град: 50, 50, 15 и 35 хиљада кутија;

– трећи град: 40, 45, 25 и 40 хиљада кутија;

– четврти град: 30, 20, 10 и 20 хиљада кутија.

– пети град: 35, 40, 15 и 25 хиљада кутија.

Применом матрице решење можемо представити:

$$A=\begin{bmatrix}40 & 60 & 20 & 30\\ 50 & 50 & 15 & 35\\ 40 & 45 & 25 & 40\\ 30 & 20 & 10 & 20\\ 35 & 40 & 15 & 25\end{bmatrix}.$$

Проблем инпут-оутпут табеле у којој су величине дате у милионима долара у години:

Табела 5.

Сектор који производи / *Сектор који конзумира*	*(1) Угаљ*	*(2) Електрицитет*	*(2) Финална потражња*	*Укупни оутпут*
(1)Угаљ	*80*	*60*	*60*	*200*
(2)Електрицитет	*80*	*30*	*40*	*150*

можемо утврдити (Mokhtari, 2018):

а) Колики су захтеви за инвестицијама за програм финалне тражње, како је приказан напред, ако треба инвестирати 1 $ капитала на сваки долар укупног годишњег оутпута угља, а 2 $ за електрицитет? Другим речима, колико треба инвестирати у дати програм финалне тражње, ако капитални коефицијенти за угаљ и електрицитет износе 1 односно 2?

б) Колики су инпут-оутпут коефицијенти a_{ij}, где индекс i означава сектор који производи а индекс j сектор који конзумира? Како изгледа матрица A тих коефицијената и инверзна матрица ?

ц) Које су алтернативне комбинације финалне тражње за износ од 500 милиона долара капитала?

Решење: Најпре треба бити опредељен, које ћемо ознаке употребити и какве су димензије појединих величина са којима ћемо радити.

Ознаке:

$$\left.\begin{aligned}X_1&=200\\ X_2&=150\end{aligned}\right\}\text{ укупни оутпути },$$

k_1, k_2 – капитални коефицијенти (capital coefficients),

Y_1, Y_2 – финална тражња,

A – матрица инпут-оутпут коефицијената.

Димензије:

Величине X_1 и X_2 имају димензију: $\$\ 10^6\ /\ \text{година}$.

Капитални коефицијенти имају димензију: $\dfrac{\$}{\$\ 1/\text{година}} = \text{година}$.

Финална тражња, очигледно, има исту димензију као укупни годишњи оутпут.

Сада се може израчунати, колики се капитал мора инвестирати у обе гране индустрије.

$$k_1X_1 + k_2X_2 = 1\cdot 200 + 2\cdot 150 = 500\ (10^6\ \$)\,.$$

То се може писати и на начин: $\sum_{i=1}^{2} k_1X_1 = 500$, или још сажетије

$$\left[k_1k_2\right]\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = K^T X = 500\,,$$

где је K^T транспонованаједноколонска (matrica kolona) капиталних коефицијената, а X матрица колона оутпута.

Калкулација инпут-оутпута коефицијената изведена је, како следи:

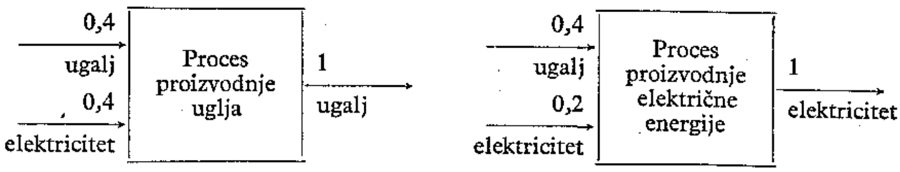
$$A = \begin{bmatrix} 80/200 & 60/150 \\ 80/200 & 30/150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \frac{2}{25} - \frac{4}{25} = -\frac{2}{25}\,.$$

Према томе је $I - A = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, и

$$(I - A)^{-1} = 5\cdot\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{5}{8}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Напомена: Овде је примењено правило: $(\lambda\cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$, или другим речима, инверзна матрица производа скалара λ и матрице A , једнака је производу реципрочне вредности $\dfrac{1}{\lambda} = \lambda^{-1}$ од λ и инверзне матрице A^{-1} .

Објаснимо сада, какво значење имају инпут-оутпут коефицијенти, тј. елементи матрице A , и то шематски на следећи начин:



Слика 1 – *Шема за инпут-оутпут коефицијенте*

Прва шема показује, да процес производње угља тражи $\frac{2}{5}=0,4$ јединице угља и $\frac{2}{5}=0,4$ јединице електрицитета за једну јединицу угља. Из друге шеме произлази да процес производње електричне енергије (у термоцентрали) захтева такође два инпута, и то 0,4 угља и 0,2 електричне енергије, да се произведе оутпут од 1 јединице електрицитета.

Разлог зашто је израчуната $\left(I-A\right)^{-1}$, очигледан је из следећег разматрања:

$$0,4X_1+0,4X_2+Y_1=X_1,$$

$$0,4X_1+0,2X_2+Y_2=X_2.$$

Интериндустријска потрошња увећана за финалну потрошњу једнака је укупном оутпуту.

То се може записати и овако: $AX+Y=X$, где је $Y=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix}$, или $AX+Y=IX$, а одатле следи $(I-A)X=Y$, и $X=(I-A)^{-1}Y$.

Сада можемо захтев за капиталом изразити и израчунати овако:

Капитал $=X=K^TX=K^T(I-A)^{-1}Y$, па следи

$$Kapital=K^TX=K^T(I-A)^{-1}Y=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\cdot\frac{5}{8}\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}60\\40\end{bmatrix}=200+300=500.$$

Коначно могу се израчунати алтернативне комбинације финалне тражње за дати износ од $500\cdot10^6$ \$ капитала, из једначине:

$$500=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\cdot\frac{5}{8}\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix}.$$

Та једначина, после сређивања, изгледа овако:

$$500 = 5Y_1 + 5Y_2 .$$

Из ње следе комбинације финалне тражње.

а) Прва комбинација: $Y_1 = 60$, $5Y_2 = 500 - 300$, $Y_2 = 40$.

То је комбинација која је напред разматрана.

б) Друга комбинација: $Y_1 = 50$, $Y_2 = 50$.

ц) Трећа комбинација: $Y_1 = 72$, $Y_2 = 28$, итд. Итд.

Могли смо те комбинације добити и из ових једначина:

$Y = (I - A)X$ и $X_1 + 2X_2 = 500$.

Комбинација од X_1 и X_2 израчунава се из друге једначине, уврштује се у прву, а из ње се добију елементи од Y. Али, будући да су два елемента матрице $I - A$ негативна, треба пазити да резултат не буде бесмислен, тј. да се не добије негативна финална тражња. Лако се показује, да у овом проблему морају бити задовољене ове неједначине:

$$3X_1 > 2X_2 ,$$

$$2X_2 > X_1 ,$$

или $\frac{3}{2}X_1 > X_2 > \frac{1}{2}X_1$,

Пример 3. Узмимо да је целокупна привреда подељена на само три гране, односно производна сектора: пољопривреду, индустрију и услужне делатности. Инпути и оутпути дати су у натуралном изразу, како показује Табела 6.:

Табела 6.

	П	И	У	Финална тражња	Укупни оутпути
Пољопривреда	0	30	0	70	100
Индустрија	20	0	20	60	100
Услужна делатност	30	30	0	40	100

Решење: Из ове матрице лако се изводи матрица инпут-оутпут коефицијената

$$\begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0 \end{bmatrix},$$

Аналитички модел изгледа, дакле, овако:

$$
\begin{aligned}
0,3Q_2 &= Q_1 - 70,\\
0,2Q_1 + 0,2Q_3 &= Q_2 - 60,\\
0,3Q_1 + 0,3Q_2 &= Q_3 - 40.
\end{aligned}
$$

Претпоставимо да је финална тражња порасла од укупно 170 јединица на 270 јединица и да је овако расподељена на поједине секторе:

Сада имамо

Табела 7.

	Нова финална тражња
Пољопривреда	90
Индустрија	100
Услужне делатности	80
Укупно	270

$$
\begin{aligned}
0,3Q_2 &= Q_1 - 90,\\
0,2Q_1 + 0,2Q_3 &= Q_2 - 100,\\
0,3Q_1 + 0,3Q_2 &= Q_3 - 80.
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
Q_1 - 0,3Q_2 &= 90,\\
-0,2Q_1 + Q_2 - 0,2Q_3 &= 100,\\
-0,3Q_1 - 0,3Q_2 + Q_3 &= 80.
\end{aligned}
$$

Систем једначина можемо писати у матричном облику овако

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}
$$
, или краће $T \cdot Q = q$.

С обзиром да је $|T| \neq 0$ и $q \neq 0$, тј да је детерминанта матрице коефицијената различита од нуле и да матрица тзв. слободних чланова није нулматрица тада се решење матричне једначине $T \cdot Q = q$ добије тако, да се та једначина помножи с лева инверзном матрицом T^{-1}, тј., $T^{-1}(T \cdot Q) = T^{-1} \cdot q$. Будући да је операција множења асоцијативна $T^{-1}(T \cdot Q) = (T^{-1}T) \cdot Q = I \cdot Q = Q$, те је $Q = T^{-1} \cdot q$, где су: Q-једноколонска матрица количине оутпута Q_i , -једноколонска матрица финалне тражње q_i и T^{-1}-инверзна матрица.

Систем једначина сада можемо писати у матричном облику на следећи начин

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \frac{T^*}{|T|} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \text{ односно } \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}}{|T|} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

Према томе матрице система једначина су

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -0,3 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,2 \\ -0,3 & -0,3 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \text{ и } q = \begin{bmatrix} 90 \\ 100 \\ 80 \end{bmatrix},$$

а интензитет матрице технологије износи

$$|T| = \begin{vmatrix} 1 & -0,3 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,2 \\ -0,3 & -0,3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0,018 - 0,06 - 0,06 = 0,862,$$

кофактори матрице *T* технологије су

$$T_{11} = 1 - 0,06 = 0,94 \qquad T_{21} = -(-0,3) = 0,3$$

$$T_{12} = -(-0,2 - 0,06) = 0,26 \qquad T_{22} = 1$$

$$T_{13} = 0,36 \qquad T_{23} = -(-0,3 - 0,09) = 0,39$$

$$T_{31} = 0,06, \; T_{32} = -(-0,2) = 0,2 \text{ и } T_{33} = 1 - 0,06 = 0,94,$$

адјунгована матрица је сада

$$T^* = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,94 & 0,3 & 0,06 \\ 0,26 & 1 & 0,2 \\ 0,36 & 0,39 & 0,94 \end{bmatrix},$$

док је инверзна матрица једнака

$$T^{-1} = \frac{T^*}{|T|} = \frac{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}}{|T|} = \frac{\begin{bmatrix} 0,94 & 0,3 & 0,06 \\ 0,26 & 1 & 0,2 \\ 0,36 & 0,39 & 0,94 \end{bmatrix}}{0,862} = \begin{bmatrix} 1,0905 & 0,348 & 0,0696 \\ 0,3016 & 1,160 & 0,2320 \\ 0,4176 & 0,452 & 1,0905 \end{bmatrix},$$

а тражена решења система једначина

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}}{|T|} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \text{ су}$$

$$Q_1 = \frac{T_{11}q_1 + T_{21}q_2 + T_{31}q_3}{T},$$

$$Q_2 = \frac{T_{12}q_1 + T_{22}q_2 + T_{32}q_3}{T},$$

$$Q_3 = \frac{T_{13}q_1 + T_{23}q_2 + T_{33}q_{31}}{T},$$

а када уврстимо вредности

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0,862} \begin{bmatrix} 0,94 & 0,3 & 0,06 \\ 0,26 & 1 & 0,2 \\ 0,36 & 0,39 & 0,94 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 90 \\ 100 \\ 80 \end{bmatrix},$$

следе решења

$$Q_1 = \frac{1}{0,862}(0,94 \cdot 90 + 0,3 \cdot 100 + 0,06 \cdot 80) = 138,5151,$$

$$Q_2 = \frac{1}{0,862}(0,26 \cdot 90 + 1 \cdot 100 + 0,2 \cdot 80) = 161,7169,$$

$$Q_3 = \frac{1}{0,862}(0,36 \cdot 90 + 0,39 \cdot 100 + 0,94 \cdot 80) = 170,0696.$$

Закључак

Коришћење матричног рачуна у изучавању економских функција омогућава захватање широког спектра детерминисаних појава које у највећем делу обухватају привредну активност. Ова решења могу се добити на други начин на основу следећег разматрања.

Истраживање како макро економских тако и микро економских сектора изискује модалитет представљања зависности између компонената које га сачињавају, без обзира да ли се ради о затвореним или отвореним економским системима.

Коришћењем матрица лако се изводи матрица инпут-оутпут коефицијената која представља основ за успостављање односа између појединачних чинилаца. Закључивањем на примеру производње у којима макроекономски посматрано учествују одређени сектори, ствара се основа за коришћење матричног рачуна у коме се између појединачних привредних сектора успоставља однос који се пондерише коефицијентима међузависности којима се дефинише однос узимања и давања који се остварују између сектора.

На микро економском плану матрични рачун заузима значајно место у системима обрачуна трошкова где се односи у традиционалним системима успостављају системом еквивалентних бројева. Све ово ставља матрични рачун у средиште изучавања детерминисаних економских догађаја.

Литература

[1] Adedigba, S.A., Khan, F., Yang M. (2018) An integrated approach for dynamic economic risk assessment of process systems, Process Safety and Environmental Protection, vol. 116, pp. 312-323.

[2] Aguiar, V.H., Serrano R. (2017) Slutsky matrix norms: The size, classification, and comparative statics of bounded rationality, Journal of Economic Theory, vol. 172, pp. 163-201.

[3] Arai, R., Naito, K., Ono T. (2018) Intergenerational policies, public debt, and economic growth: A politico-economic analysis, Journal of Public Economics, vol. 166, pp. 39-52.

[4] Babić Z., Aljinović Z.(1996) Ekonomska matematika, Ekonomski fakultet, Split.

[5] Damnjanović, R., Ivanov, N., Milenković, N. (2017). Matematičko modeliranje cena akcija. Oditor - časopis za Menadžment, finansije i pravo, 3(3), 13-33.

[6] Drnovak M. (1999) Privredna i finansijska matematika, Modeli i algoritmi, Kragujevac.

[7] Galbusera, L., Giannopoulos G. (2018) On input-output economic models in disaster impact assessment, International Journal of Disaster Risk Reduction, vol. 30, pp. 186-198.

[8] Horvatić K. (1995) Linearna algebra, Matematički odjel PMF-a Zagreb.

[9] Krstić, S. L., Gligić-Savić, A. P., Gligić-Dumonjić, J. P. (2017). Mogućnost upravljanja rizikom portfolija hartija od vrednosti. Vojno delo, 69(6), 374-383.

[10] Mokhtari H. (2018) Economic order quantity for joint complementary and substitutable items, Mathematics and Computers in Simulation, vol. 154, pp. 34-47.

[11] Munđar D. (2018) Difference equations with demonstration of application in the demographic modeling, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike (1332-3008) 75 (2018), 2018; 68-76.

[12] Selaković, M., Ljepava, N., Dželetović, M. (2018). Upravljanje inovacijskim promenama u savremenom okruženju. Vojno delo, 70(3), 448-459.

[13] Stanojević, S., Đorđević, N., Volf, D. (2017). Primena kvantitativnih metoda u predviđanju poslovanja privrednih društava. Oditor - časopis za Menadžment, finansije i pravo, 3(1), 92-101.

[14] Toyrki M. (1998) Modeliranje ekonomskih procesa u uslovima stohastičnosti i konflikata, Ekonomski fakultet.

[15] Petković, N., Božinović, M., Stojanović, S. (2018). Optimizacija portfolija primenom Markovljevih lanaca. Anali Ekonomskog fakulteta u Subotici, (40), 21-32.